

УДК 519.248

**Б. А. МАНДЗІЙ, С. В. ЩЕРБОВСЬКИХ***Національний університет «Львівська політехніка», Львів*

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НАДІЙНОСТІ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПРИЧИН НЕПРАЦЕЗДАТНОСТІ СИСТЕМИ ІЗ РОЗДІЛЬНИМ ЗАМІЩУВАЛЬНИМ РЕЗЕРВУВАННЯМ

*Запропоновано математичну модель надійності системи із роздільним заміщувальним резервуванням, призначену для аналізу причин непрацездатності такої системи. Математична модель адекватно враховує вплив перерозподілу навантаження на ймовірнісні показники мінімальної множини перетинів. Процеси перерозподілу навантаження формалізовано динамічним деревом відмов, а ймовірнісні характеристики перетинів визначені за розщепленою однорідною марковською моделлю. Одержані результати є основою для розроблення заходів щодо підвищення надійності досліджуваної системи.*

**Ключові слова:** модель надійності, мінімальна множина перетинів, перерозподіл навантаження, динамічне дерево відмов, граф станів та переходів, марковська модель.

### Вступ. Постановка проблеми

Розроблення рекомендацій щодо підвищення надійності систем виконують на основі пошуку і аналізу причин їх непрацездатності. Кожній причині непрацездатності відповідає унікальний набір непрацездатних елементів, який називають перетином. Усій сукупності незалежних причин непрацездатності відповідає мінімальна множина перетинів. Мета аналізу надійності полягає у визначенні ймовірнісних характеристик усіх перетинів із мінімальної множини. Для системи із роздільним заміщувальним резервуванням необхідно відобразити вплив непрацездатності окремих елементів та підсистем на навантаження решти працездатних елементів. У результаті такого впливу зазнають змін ймовірнісні показники перетинів, для визначення яких необхідно розробити адекватну математичну модель надійності. Дана проблема виникає під час забезпечення заданого рівня надійності електротехнічних та електроенергетичних систем, які застосовують в об'єктах підвищеної безпеки.

### 1. Огляд літературних джерел

Для визначення ймовірнісних характеристик перетинів використовують два підходи: логіко-ймовірнісний аналіз та марковський аналіз. Логіко-ймовірнісний аналіз ґрунтується на складанні логічних умов, які відповідають перетинам, із подальшим їх перетворенням до ймовірнісних виразів [1]. Такий підхід простий у застосуванні, проте на його основі не можна коректно враховувати зміну навантаження, спричинену відмовами елементів. Марковський

аналіз зазначених обмежень не має [2], проте під час його застосування виникають складності, пов'язані із високою трудомісткістю та обмеженням розподілу тривалості напрацювання та ремонтування елементів експоненціальним законом. Для зменшення трудомісткості такого аналізу необхідно вдосконалити методи автоматичної побудови марковської моделі [3]. Таку побудову виконують на основі дерева відмов, яке необхідно доповнити параметрами, що математично описують надійнісну поведінку за навантаженням [4]. Для усунення обмеження експоненціальним розподілом необхідно застосувати методи розщеплення простору станів [5], які повинні адекватно урахувати запам'ятовування передісторії напрацювання елементів системи за навантаженням.

### 2. Задачі дослідження

- формалізувати опис надійності системи на основі динамічного дерева відмов;
- побудувати модель станів і подій системи;
- сформувати розщеплену однорідну марковську модель системи;
- визначити ймовірнісні показники мінімальних перетинів системи.

### 3. Динамічне дерево відмов системи

Система складена із чотирьох елементів (рис. 1а): двох генераторів G1 і G2, які утворюють першу групу, та двох трансформаторів TV1 і TV2, які другу групу. Елементи G1 і TV1 основні, а G2 і TV2 — резервні. У кожній групі елементи працюють за алгоритмом заміщувального резервування,

тобто якщо основний елемент у групі працездатний, то резервний перебуває у ненавантаженому режимі. Якщо основний елемент стає непрацездатним, то резервний переходить у навантажений режим. Групи між собою утворюють послідовне з'єднання. Вважаємо, що засоби технічної діагностики та перемикування ідеальні, а тривалість зміни навантаження між елементами у групі — миттєва.

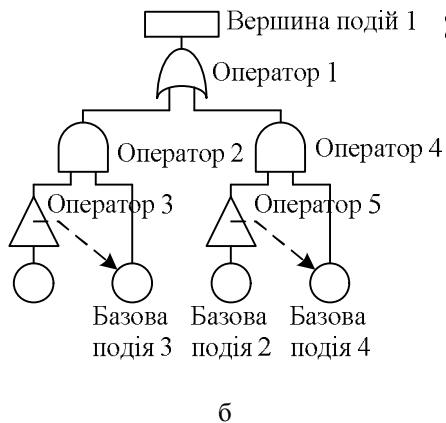
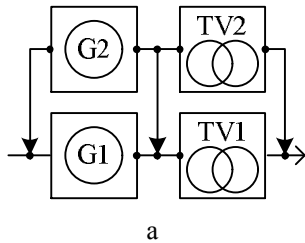


Рис. 1. Структура і динамічне дерево відмов системи

Надійність системи формалізовано динамічним деревом відмов, структура якого подана на рис. 1б. Динамічне дерево відмов є математичною моделлю, яка описує умову непрацездатності системи та її надійнісну поведінку за навантаженням на основі блоків, що позначають логічні операції та операції відношення. Непрацездатність системи, позначена блоком «вершина подій 1», полягає у тому, що система нездатна забезпечити енергією споживачів, які підключені до її виходу. Вважаємо, що така непрацездатність катастрофічна. Тобто якщо настають непрацездатності окремих елементів, проте система зберігає працездатність, то такі елементи відновлюються стільки разів, скільки у цьому існує потреба. Якщо ж уся система стає непрацездатною, то відновлення елементів системи вважається неможливим. Непрацездатність системи настає, якщо непрацездатна перша або друга група елементів, що описано блоком «оператор 1», тип якого задано логічною операцією АБО. Непрацездатність першої групи настає якщо непрацездатні усі її елементи, що описано блоком «оператор 2», тип якого задано ло-

гічною операцією І. Непрацездатність другої групи описуємо за аналогією блоком «оператор 4», тип якого задано логічною операцією І. Непрацездатність генератора G1 позначено блоком «базова подія 1», а його напрацювання до відмови розподілено за законом Вейбулла із параметрами  $\alpha_1$  і  $\beta_1$ . Непрацездатність трансформатора TV1 — блоком «базова подія 2» та за розподілом Вейбулла із параметрами  $\alpha_2$  і  $\beta_2$ ; непрацездатність G2 — блоком «базова подія 3» та за розподілом Вейбулла із параметрами  $\alpha_3$  і  $\beta_3$ ; та непрацездатність TV2 — блоком «базова подія 4» та за розподілом Вейбулла із параметрами  $\alpha_4$  і  $\beta_4$ . Тривалість ремонтування основних елементів в обох групах вважаємо розподіленою експоненціально із параметром  $\mu$ . Ремонтування резервних елементів в обох групах за вказаних умов незатребуване.

У даній моделі надійності відбуваються такі динамічні процеси:

- зміна навантаження елементів першої групи, залежно від стану другої;
- зміна навантаження елементів другої групи, залежно від стану першої;
- зміна навантаження резервного елемента першої групи, залежно від стану основного її елемента;
- зміна навантаження резервного елемента другої групи, залежно від стану основного її елемента.

Перший та другий процес в явній формі задавати немає потреби, оскільки якщо відбувається відмова однієї із груп, то система стає непрацездатною, що автоматично означає переведення у ненавантажений режим решти працездатних елементів.

Для опису третього і четвертого процесів введемо у дерево відмов блоки «оператор 3» та «оператор 5», які є повторювачами логічного сигналу, і задамо у них умови зміни навантаження. Якщо логічний сигнал на виході блока «оператор 3» дорівнює ХИБНО, тобто генератор G1 працездатний, то інтенсивність процесу напрацювання генератора G2, який задано у блоці «базова подія 3», множимо на 0. Відповідно, якщо логічний сигнал на виході блока «оператор 5» дорівнює ХИБНО, тобто трансформатор TV1 працездатний, то інтенсивність процесу напрацювання трансформатора TV2, який задано у блоці «базова подія 4», так само множимо на 0.

#### 4. Модель станів та подій системи

На підставі наведеного вище динамічного дерева відмов системи із роздільним заміщувальним резервуванням, згідно із формалізованими правилами [5, с. 67] складена модель станів та подій. Така модель є математичним описом станів, в яких може перебувати система, та подій, які у ній можуть відбуватися, у проекційному зв'язку до процесів, що



марковської моделі. Вважаємо, що для процесу  $P_1\{\alpha_1, \beta_1\}$  параметри його марковської моделі становлять  $\{A_1, p_1(0), C_1\}$ , для  $P_2\{\alpha_2, \beta_2\} — \{A_2, p_2(0), C_2\}$ , для  $P_3\{\alpha_3, \beta_3\} — \{A_3, p_3(0), C_3\}$  та для  $P_4\{\alpha_4, \beta_4\} — \{A_4, p_4(0), C_4\}$ ,  $P_5\{\mu\} — \{A_5, p_5(0), C_5\}$  та  $P_6\{\mu\} — \{A_6, p_6(0), C_6\}$ .

Відповідно до вказаних параметрів компоненти марковської моделі системи обчислено згідно із поданими нижче формулами, зокрема, для початкового працездатного стану  $S_8$ :

$$A_{S_8} = A_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes A_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6, \quad (3)$$

$$p_{S_8}(0) = p_1(0) \otimes \dots \otimes p_6(0),$$

де  $E_1$ – $E_6$  — одиничні матриці, розмірність яких дорівнює розмірності матриць  $A_1$ – $A_6$ .

Для працездатного стану  $S_7$ :

$$A_{S_7} = E_1 \otimes A_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes E_2 \otimes A_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes A_5 \otimes E_6. \quad (4)$$

Для працездатного стану  $S_6$ :

$$A_{S_6} = A_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes A_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes A_6. \quad (5)$$

Для працездатного стану  $S_5$ :

$$A_{S_5} = E_1 \otimes E_2 \otimes A_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes A_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes A_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes A_6. \quad (6)$$

Для непрацездатних станів  $S_1$ – $S_4$ :

$$C_{S_1} = C_{S_2} = C_{S_3} = C_{S_4} = I, \quad (7)$$

де  $I$  — одиничний вектор-рядок, розмірність якого дорівнює добутку розмірностей усіх матриць інтенсивності переходів  $A_1$ – $A_6$ .

Для подій  $T_1$  та  $T_6$ , спричинених завершенням процесу  $P_1$ :

$$A_{T_1} = A_{T_6} = p_1 C_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6. \quad (8)$$

Для подій  $T_2$  та  $T_3$ , спричинених завершенням процесу  $P_2$ :

$$A_{T_2} = A_{T_3} = E_1 \otimes p_2 C_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6. \quad (9)$$

Для подій  $T_4$  та  $T_9$ , спричинених завершенням процесу  $P_3$ :

$$A_{T_4} = A_{T_9} = E_1 \otimes E_2 \otimes p_3 C_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6. \quad (10)$$

Для подій  $T_7$  та  $T_{10}$ , спричинених завершенням процесу  $P_4$ :

$$A_{T_7} = A_{T_{10}} = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes p_4 C_4 \otimes E_5 \otimes E_6. \quad (11)$$

Для подій  $T_5$  та  $T_{11}$ , спричинених завершенням

процесу  $P_5$ :

$$A_{T_5} = A_{T_{11}} = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes p_5 C_5 \otimes E_6. \quad (12)$$

Для подій  $T_8$  та  $T_{12}$ , спричинених завершенням процесу  $P_6$ :

$$A_{T_8} = A_{T_{12}} = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes p_6 C_6. \quad (13)$$

Одержана модель містить 128 диференціальних рівнянь.

## 6. Мінімальна множина перетинів

Застосовуючи розщеплену однорідну марковську модель системи із роздільним заміщувальним резервуванням на основі методу Розенброка обчислено ймовірнісні характеристики мінімальних перетинів системи. Використання методу Розенброка обумовлено тим, що марковська модель системи жорстка. Така її властивість обумовлена розкидом параметрів для процесів напрацювання та ремонтування, а також розщепленням простору станів.

Мінімальна множина перетинів системи складається із перетину «TV1–TV2», якому відповідають непрацездатні стани  $S_1$  і  $S_2$ , та «G1–G2» —  $S_3$  і  $S_4$ . Криві ймовірнісних характеристик перетинів системи подані на рис. 3, зокрема, суцільна крива 1 відповідає функції ймовірності перетину «TV1–TV2», а штрихова крива 2 — «G1–G2».

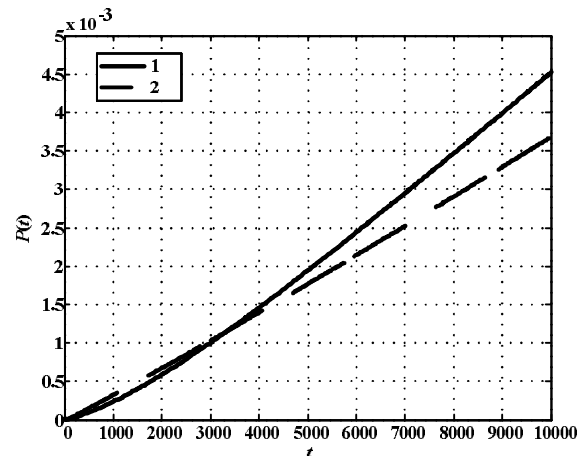


Рис. 3. Криві ймовірнісних характеристик множини мінімальних перетинів системи

Приймаємо, що параметри розподілів набувають такі числові значення:  $\alpha_1 = 11\,000$  год.,  $\beta_1 = 1,1$ ,  $\alpha_2 = 7\,000$  год.,  $\beta_2 = 1,3$ ,  $\alpha_3 = 10\,000$  год.,  $\beta_3 = 1,1$ ,  $\alpha_4 = 6\,000$  год.,  $\beta_4 = 1,3$  та  $\mu = 0,02$  год<sup>-1</sup>. На підставі даних про перетини робимо висновок, що для зменшення ймовірності відмови системи для моменту часу 10 000 год. необхідно вжити заходів щодо підвищення безвідмовності трансформаторної групи, оскільки її непрацездатність є найімовірнішою причиною непрацездатності системи із вагою 55,13 %.

## Висновки

Розроблено математичну модель надійності системи із роздільним заміщувальним резервуванням, призначену для визначення ймовірнісних показників перетинів. Надійності системи описано динамічним деревом відмов, а ймовірнісні показники визначені за розщепленою однорідною марковською моделлю. Одержана модель забезпечила адекватне урахування зміни навантаження елементів, тривалість напрацювання яких розподілена за законом Вейбулла. За вказаною моделлю адекватно визначено ймовірнісні показники перетинів та показано, надійність яких елементів необхідно покращувати першочергово, щоб зменшити ймовірність відмови системи.

Подальші дослідження скеровані на розроблення математичних моделей надійності, які призначені для аналізу причин непрацездатності систем із складною комбінованою структурою.

## Література

1. Vega M. Algorithm to evaluate substation reliability with cut and path sets [Text]/ M. Vega, H. G. Sarmiento // *Industry Applications, IEEE Transactions on*. — 2008. — Vol. 44, No 6. — P. 1851–1858.
2. Yong Liu. Reliability evaluation of composite power systems using Markov cut-set method [Text]/ Yong Liu, C. Singh // *Power Systems, IEEE Trans. on* — 2010. — Vol. 25, No. 2. — P. 777-785.
3. Haitao Guo. Automatic creation of Markov models for reliability assessment of safety instrumented systems [Text]/ Haitao Guo, Xianhui Yang // *Reliability Engineering & System Safety*. — 2008. — Vol. 93, No 6. — P. 829–837.
4. Codetta-Raiteri D. Integrating several formalisms in order to increase Fault Trees' modeling power [Text]/ D. Codetta-Raiteri // *Reliability Engineering & System Safety*. 2011. — Vol. 96, No 5. — P. 534-544.
5. Щербовських, С. В. Математичні моделі та методи для визначення характеристик надійності багатотермінальних систем із урахуванням перерозподілу навантаження: монографія [Текст]/ С. В. Щербовських. — Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2012. — 296 с.

*Надійшла до редакції 19.03.2014, розглянута на редколегії 24.03.2014*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. І. Б. Туркін, Національний аерокосмічний університет «ХАІ», Харків, Україна.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРИЧИН НЕРАБОТОСПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ С РАЗДЕЛЬНЫМ ЗАМЕСТИТЕЛЬНЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ

*Б. А. Мандзий, С. В. Щербовских*

Предложено математическую модель надежности системы с раздельным заместительным резервированием, которая предназначена для анализа причин неработоспособности такой системы. Математическая модель адекватно учитывает влияние перераспределения нагрузки на вероятностные характеристики минимального множества сечений. Процессы перераспределения нагрузки математически описано динамическим деревом отказов, а вероятностные характеристики сечений определены на основе расщепленной однородной марковской модели. Полученные результаты являются основой для разработки мероприятий по повышению надежности исследуемой системы.

**Ключевые слова:** модель надежности, минимальное секующее множество, перераспределение нагрузки, динамическое дерево отказов, граф состояний и переходов, марковская модель.

## MATHEMATICAL RELIABILITY MODEL FOR FAILURE CAUSE ANALYSIS FOR SYSTEM WITH SEGREGATED STANDBY REDUNDANCY

*B. A. Mandziy, S. V. Shcherbovskykh*

A mathematical reliability model for system with segregated standby redundancy which designed for failure cause analysis is suggested. A mathematical model adequately takes into account load-sharing impact on minimal cut set probability characteristics. Load-sharing processes are formalized by dynamic fault tree, and cut characteristics are calculated by split homogeneous Markov model. The results are the basis for recommendation developing for reliability improving of treated system.

**Key words:** reliability model, minimal cut set, load-sharing, dynamical fault tree, state and transition diagram, Markov model.

**Мандзий Богдан Андрійович** — д-р техн. наук, проф. кафедри теоретичної радіотехніки та радіовимірювання (ТРП) Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: bmandziy@polynet.lviv.ua.

**Щербовських Сергій Володимирович** — д-р техн. наук, ст. наук. співр. науково-дослідної групи при кафедрі ТРП Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: shcherbov@polynet.lviv.ua.